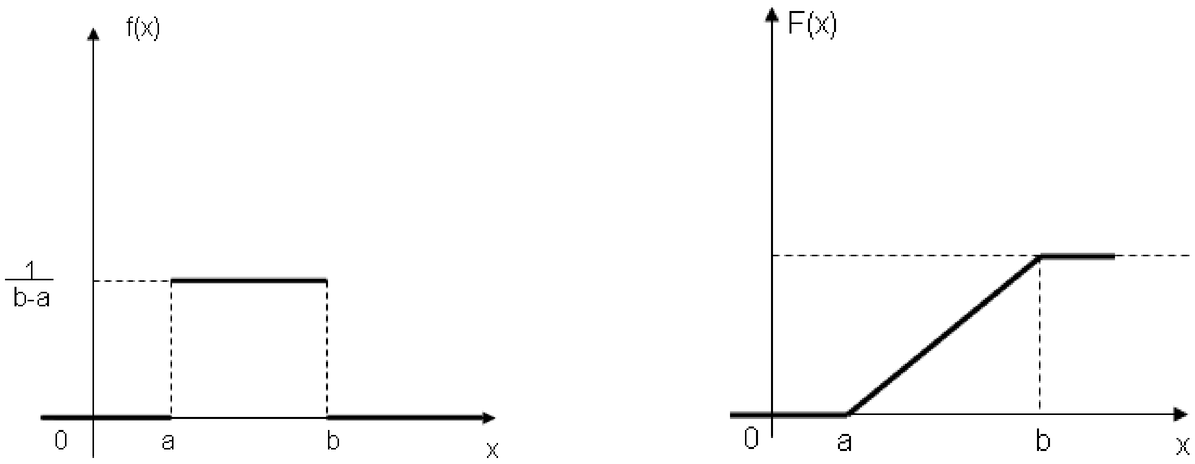
№9 дәріс сабағы
Үзіліссіз кездейсоқ шамалардың бірқалыпты, қалыпты, көрсеткішті үлестірілуі және олардың сандық сипаттамалары.

1. *Бірқалыпты үлестірім заңы.* X кездейсоқ шамасы бірқалыпты үлестірілген болса, оның үлестірім тығыздығы $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases}$, $-\infty<a<b<\infty$ болады.

Бірқалыпты үлестірімінің тығыздығы мен функциясының графигі 13-суретте көрсетілген.



13-сурет

Бірқалыпты үлестірімнің негізгі сандық мінездемелері: математикалық күтім, дисперсия сәйкесінше төмендегі формулалармен анықталады:

$$M(X)=\frac{a+b}{2};\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

2. *Қалыпты үлестірім заңы.* X кездейсоқ шамасы қалыпты заңмен үлестірілген деп аталады, оның үлестірім тығыздығы:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}-e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

формуласымен анықталса, мұндағы a дегеніміз - X кездейсоқ шамасының математикалық үміті, σ дегеніміз – орташа квадраттық ауытқу.

Онда оның сәйкес ықтималдығының үлестірім функциясы

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}-e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Қалыпты үлестірімінің тығыздығы мен функциясының графигі 15-суретте көрсетілген.

Қалыпты үлестірім өзінің математикалық күтіміне қатысты симметриялы. Қалыпты үлестірілген X кездейсоқ шамасының модасы, медианасы және математикалық күтімдері өзара тең. Қалыпты заңмен үлестірілген үлестірімнің қисығы Гаусс қисығы деп аталады.

Сондай-ақ, қалыпты үлестіріммен берілген кездейсоқ шаманың берілген интервалдан мән қабылдауының ықтималдығы:

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

мұндағы $\Phi(x)$-Лаплас функциясы.

Мына формула

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

кездейсоқ шаманың өзінің математикалық үмітінен ауытқуының абсолют шамасы δ-дан кіші болуының ықтималдығын анықтайды.

Егер формулада $\delta = 3\sigma$ болса, онда

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3)$$

немесе

$$P(|X - a| < 3\sigma) \approx 0{,}9973,$$

яғни, кездейсоқ шаманың өзінің математикалық күтімінен ауытқуының абсолют шамасы 3σ-дан аспауының ықтималдығы бірге өте жақын екенін көрсетеді.

Осыдан *үш сигма ережесі* шығады:

Егер кездейсоқ шама қалыпты үлестіріммен берілсе, онда оның математикалық күтімінен ауытқуының абсолют шамасы үш орта квадратталған ауытқудан аспайды.

3. *Көрсеткіштік (экспоненциалды) үлестірім заңы. X* кездейсоқ шамасы көрсеткіштік үлестірілген болса, оның үлестірім тығыздығы

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

мұндағы λ - оң тұрақты шама.

Оған сәйкес ықтималдықтың үлестірім функциясы

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & если \;\; x \ge 0 \\ 0, & если \; x < 0 \end{cases}.$$

Көрсеткіштік үлестірімнің тығыздығы мен ықтималдығының үлестірім функциясы 14-суретте бейнеленген.

Көрсеткіштік үлестірімнің негізгі сандық мінездемелері: математикалық күтім, дисперсия, орташа квадраттық ауытқу сәйкесінше төмендегі формулалармен анықталады:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \sigma = \frac{1}{\lambda}.$$

Экспоненциалды функция жалғыз λ параметріне тәуелді. Оның кейбір сандық мінездемелері де осы λ параметрімен анықталады. Дербес жағдайда, оның математикалық күтімі орташа квадраттық ауытқумен беттеседі.